

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ ВЫРОЖДЕНИЙ В A_∞ -СЛУЧАЕ¹

Аннотация. Рассматривается вопрос построения аналога симплициальных вырождений в A_∞ -случае. Предъявляется конструкция высших граней, доказывается теорема об их существовании на гомологиях, а также рассматривается вопрос о действии дифференциала на таком объекте. Доказательство теоремы существования конструктивно, что позволяет строить полученные новые объекты на гомологиях цепных комплексов. При доказательстве теорем используется техника SDR-ситуаций.

Ключевые слова: симплициальный объект, гомологии, гомотопическая устойчивость, SDR-ситуация, высшие вырождения.

Abstract. The article considers the construction of A_∞ -case simplicial degeneracy analogue. The author presents a design of higher facets, proves their existence on the homology, and addresses the effect of the differential on this site. As the proof of the existence theorem is constructive, it allows to construct new objects on the homology of chain complexes. While proving the theorems the author used the technique of SDR-situations.

Key words: simplicial object, homology, homotopy stable, SDR-situation, high degenerations.

Введение

В последнее время в алгебраической топологии актуальным является процесс создания аналогов алгебраических структур, которые были бы устойчивы при переходе к гомотопическому случаю. Первые работы в этом направлении относятся к 70-м гг. прошлого века (Дж. Мэй, Т. Кадеишвили, В. Смирнов) и касались построения аналога градуированных и дифференциальных алгебр [1]. Позднее велись работы по созданию подобного рода аналогов для алгебр Ли, дифференциальных модулей, коммутативных алгебр и др. [2].

Результаты, представленные в данной работе, являются обобщением работ, начатых в [3]. Подход, предлагаемый автором, является более алгебраическим и позволяет построить в дальнейшем аналог всей структуры симплициального множества, а не только его предсимплициальной части. Аналоги высших граней, необходимые для дальнейшего построения всей симплициальной структуры, были получены в [4]. Основными результатами данной работы являются сама конструкция аналога высших вырождений, а также утверждения о его существовании и правиле вычисления дифференциалов от высшего вырождения.

Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, т.е. над $\mathbf{Z}_2$. Подобный прием является

¹ Работа выполнена в рамках проекта «Описание волновых процессов методами гомологической алгебры и алгебраической топологии» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.». Государственный контракт № П1113 от 2 июня 2010 г.

часто используемым в алгебраической топологии, так как позволяет избежать постоянной записи знаков, а также проверки их совпадения. Однако большинство утверждений, верных для случая поля характеристики 2, остаются верными и для произвольного случая.

1. Конструкция высших симплициальных вырождений

Изложим основные определения, необходимые для дальнейшего изложения положений работы. Начнем с определения симплициального множества [5].

Определение 1. Симплициальным множеством называется градуированное множество $K = \bigcup_q K_q$, $q \geq 0$, рассматриваемое вместе с отображениями $d_i : K_q \rightarrow K_{q-1}$ и $s_i : K_q \rightarrow K_{q+1}$, $0 < i \leq q$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad d_i d_j &= d_{j-1} d_i \text{ если } i < j, \\ \text{(ii)} \quad s_i s_j &= s_{j+1} s_i \text{ если } i < j, \\ \text{(iii)} \quad d_i s_j &= s_{j-1} d_i \text{ если } i < j, \\ d_j s_j &= id = d_{j+1} s_j, \\ d_i s_j &= s_j d_{i-1} \text{ если } i > j+1. \end{aligned} \tag{1}$$

Элементы K_q будем называть q -симплексом, или симплексом размерности q . Отображения d_i и s_j называют соответственно операторами граней и вырождений.

При рассмотрении гомотопически устойчивых аналогов симплициальных вырождений нам особенно интересны будут соотношения (ii) из формулы (1).

Прежде чем сформулировать определение гомотопически устойчивого аналога симплициальных вырождений, введем некоторые обозначения, которые будут необходимы в дальнейшем при формулировке утверждений и построении конструкций. Для этого рассмотрим сначала упорядоченный набор натуральных чисел $i_1, \dots, i_k$, в котором каждый индекс также принадлежит множеству натуральных чисел. Будем обозначать $t(i_j)$ для числа i_j , входящего в $i_1, \dots, i_k$, если $i_{r_1} < i_j, \dots, i_{r_t} < i_j$ и $r_1 > j, \dots, r_t > j$. Другими словами, t – количество чисел $i_{r_1} < i_s$, стоящих правее i_s . Также можно сказать, что $t(i_j)$ – число инверсий в подстановке $(i_1, \dots, i_k)$, соответствующих элементу i_j . Будем обозначать $\hat{i}_j$ для числа i_j , входящего в $i_1, \dots, i_k$, если $\hat{i}_j = i_j + t(i_j)$.

Пример 1. Рассмотрим последовательность (3, 1, 2, 4, 5). Вычислим значения $\hat{x}$ для каждого числа x из данной последовательности:

$$\hat{3} = 3 + 2 = 5,$$

$$\hat{1}=1, \hat{2}=2, \hat{4}=4, \hat{5}=5.$$

Рассмотрим цепной комплекс X , т.е. модуль $X = \oplus C_i$, где каждый C_i – модуль, снабженный последовательностью отображений $d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$, называемых дифференциалами, удовлетворяющих условию

$$d_i(d_{i+1}) = 0.$$

Определим на этом комплексе структуру высших симплициальных вырождений.

Определение 2. Будем говорить, что на цепном комплексе X с дифференциалом d заданы высшие симплициальные вырождения, если цепной комплекс снабжен набором отображений $s_{i_1, i_2, \dots, i_n}$,

$$s_{i_1, i_2, \dots, i_n} : X_m \rightarrow X_{m-1},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$ds_i = s_i d, \quad (2)$$

$$\sum s_{\hat{\sigma}(i_1), \hat{\sigma}(i_2), \dots, \hat{\sigma}(i_n)} = 0, \quad (3)$$

где σ – подстановка из симметрической группы S_k , а суммирование идет по всем подстановкам из группы S_k , действующим на данный набор $i_1, \dots, i_k$. Символ $\hat{\sigma}(i_j)$ рассматривается в смысле введенных выше обозначений.

Отображения $s_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ будем называть высшими вырождениями.

Определение 3. Если высшее вырождение $s_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ удовлетворяет условию $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$, то высшее вырождение будем называть упорядоченным. Заметим, что если вырождение $s_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ упорядоченное, то $\hat{i}_j > 0$.

Рассмотрим условия из определения 2. Следует отметить, что соотношения (2) означают, что высшие вырождения в первой размерности являются отображениями дифференциальных модулей. Соотношения (3) соответствуют обычным симплициальным соотношениям (ii) для вырождений в случае симплициального модуля. В размерности 2 соотношения (3) в точности повторяют соотношения (ii) из определения 1. Как и симплициальные соотношения, соотношения (3) позволяют записать любое высшее вырождение в виде линейной комбинации вырождений, одно из которых упорядочено.

Пример 2. Рассмотрим соотношения (3) из определения 2 на примере. Рассмотрим последовательность чисел (1, 3, 2, 4). Если применить к входящим в нее числам операцию $\hat{x}$, то получим последовательность (1, 4, 2, 4). Применяя подстановки из S_4 , получим последовательности (1, 3, 4, 2), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1), (3, 4, 2, 1), (3, 4, 1, 2), (4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 2, 1), (4, 3, 1, 2).

Применяя к каждой из полученной подстановке операцию $\hat{x}$, получим соответственно (1, 4, 5, 2), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, 3), (1, 6, 2, 3), (1, 6, 4, 2), (3, 1, 3, 4),

(3, 1, 5, 3), (3, 4, 1, 4), (3, 4, 5, 1), (3, 5, 1, 3), (3, 6, 4, 1), (5, 1, 2, 4), (5, 1, 5, 2), (5, 3, 1, 4), (5, 3, 5, 1), (5, 6, 3, 1), (5, 6, 1, 2), (7, 1, 2, 3), (7, 1, 4, 2), (7, 3, 1, 3), (7, 3, 3, 1), (7, 5, 3, 1), (7, 5, 1, 2). Применяя формулу (2) из определения 2, получаем

$$\begin{aligned} & s_{1,4,5,2} + s_{1,2,3,4} + s_{1,2,5,3} + s_{1,6,2,3} + s_{1,6,4,2} + s_{3,1,3,4} + s_{3,1,5,3} + s_{3,4,1,4} + \\ & + s_{3,4,5,1} + s_{3,5,1,3} + s_{3,6,4,1} + s_{5,1,2,4} + s_{5,1,5,2} + s_{5,3,1,4} + s_{5,3,5,1} + s_{5,6,3,1} + \\ & + s_{5,6,1,2} + s_{7,1,2,3} + s_{7,1,4,2} + s_{7,3,1,3} + s_{7,5,3,1} + s_{7,5,1,2} + s_{1,4,2,4} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения между высшими симплициальными гранями с n индексами содержат $n!$ слагаемых.

2. Существование высших симплициальных вырождений

Опишем топологический объект, на котором существуют высшие вырождения. Для этого рассмотрим цепной комплекс C с дифференциалом d . Пусть на данном цепном комплексе заданы отображения $s_i: C \rightarrow C$, удовлетворяющие условиям (ii) из определения 1 и согласованные с дифференциалом d таким образом, что каждое вырождение является цепным отображением, т.е. $ds_i = s_i d$. Тогда на гомологиях данного цепного комплекса $H(C)$, рассматриваемого как цепной комплекс с нулевым дифференциалом, существует структура высших симплициальных вырождений.

Теорема 1. На гомологиях $H(C)$ цепного комплекса C , на котором заданы цепные вырождения, удовлетворяющие условиям $s_i s_j = s_{j+1} s_i$, если $i < j$, существует структура высших симплициальных вырождений.

Доказательство. Для того чтобы доказать данное утверждение, представим алгоритм получения высших вырождений на гомологиях цепного комплекса и покажем, что полученные вырождения определяют на $H(C)$ структуру высших симплициальных вырождений.

Рассмотрим стандартную SDR-ситуацию цепных комплексов C и $H(C)$, т.е. систему отображений $\{\eta: C \rightarrow H(C), \xi, h\}$, если для отображений

$$h: C \rightarrow C, \eta: C \rightarrow H(C), \xi: H(C) \rightarrow C$$

выполняются следующие условия:

$$dh + hd = \xi\eta + id; \quad h\xi = 0; \quad \eta h = 0; \quad hh = 0; \quad \eta\xi = id. \quad (4)$$

Отображение $h: C \rightarrow C$ – гомотопия между отображением $\xi\eta$ и тождественным отображением. Отображение $\eta: C \rightarrow H(C)$ – выбор класса гомологий по представителю, отображение $\xi: H(C) \rightarrow C$ – выбор представителя в классе. В общем случае отображение ξ является неоднозначным, однако путем фиксации разложения C в прямую сумму $C \oplus H(C)$ однозначность отображения ξ может быть достигнута. Поскольку мы рассматриваем все модули над полем (здесь не важна характеристика поля), то такое разложение всегда существует и однозначно определяет отображение ξ путем выбора представителя из второго слагаемого. Заметим, что отображения η и ξ являются цепными, т.е. перестановочны с дифференциалом в соответствующих комплексах (дифференциал в комплексе гомологий рассматривается как тривиальный).

Теперь рассмотрим получение высшего вырождения на комплексе го-
мологий. Для произвольного высшего вырождения $s_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ составим упоря-
доченную последовательность $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}$. К каждой паре последовательных
вырождений s_t, s_{t+1} из данной последовательности применим симплициаль-
ные соотношения (ii) из определения 1 (слева направо), если возможно. Затем
к полученным последовательностям тоже, если это возможно. Процесс всегда
конечен, поскольку рано или поздно будет получена последовательность,
в которой все числа расположены по неубыванию слева направо. Получим
для каждой исходной последовательности $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}$ набор последователь-
ностей $\{s_{t_1}, s_{t_2}, \dots, s_{t_k}\}$.

Определим высшее вырождение $s_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ по следующим формулам:

$$s_{t_1} = \eta s_{i_1} \xi \quad (5)$$

для высших вырождений первого порядка (т.е. обычных симплициальных
вырождений, определяемых в гомологиях);

$$s_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \sum \eta(s_{i_1} h s_{i_2} h \dots h s_{i_k}) \xi \quad (6)$$

для получения высших вырождений, порядок выше первого.

Суммирование в формуле (6) будет идти по всем возможным последо-
вательностям $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}$, полученным в результате процедуры, описанной
выше.

Покажем, что определенные приведенным способом отображения за-
дают на комплексе гомологий структуру высших вырождений. Для этого
сначала покажем, что высшие грани удовлетворяют условиям (2) и (3). При-
меним дифференциал к отображению $s_{t_1} = \eta s_{i_1} \xi$. Получим, применяя стан-
дартное правило дифференцирования,

$$d(s_{t_1}) = d(\eta s_{i_1} \xi) = d\eta s_{i_1} \xi + \eta s_{i_1} \xi d.$$

Так как отображения η, ξ являются цепными, т.е. перестановочны
с дифференциалом, то последнее равенство можно переписать в виде

$$d(s_{t_1}) = d\eta s_{i_1} \xi + \eta s_{i_1} \xi d = \eta ds_{i_1} \xi + \eta s_{i_1} d\xi = \eta(ds_{i_1} + s_{i_1} d)\xi = 0.$$

Последнее равенство выполнено, так как вырождения перестановочны
с дифференциалом в исходном комплексе, т.е. являются цепными отображе-
ниями. Так как дифференциал в комплексе гомологий определяется как три-
виальный, то полученное равенство показывает выполнение условия (2) из
определения 2.

Рассмотрим условие (3) из определения 2. Для того чтобы убедиться
в том, что сумма высших вырождений действительно равна нулю, заметим,
что число $\hat{i}_j$ будет совпадать с числом инверсий для числа i , т.е. инверсий,
которые переводят последовательность индексов в упорядоченную. Приме-
нение каждого симплициального соотношения к паре индексов приводит к

увеличению номера переходящего влево вырождения элемента на 1. Таким образом, если мы возьмем некоторую упорядоченную последовательность натуральных индексов и будем попарно применять к каждой возможной паре последовательно симплициальные соотношения, то число, на которое уменьшается номер грани в результате последовательного действия нескольких симплициальных соотношений, есть в точности число упорядоченных инверсий, или число $t(i_j)$. При этом среди перечисленных в формуле (3) высших вырождений будет только одно упорядоченное. Таким образом, любая грань, входящая в формулу (3), может быть получена в результате одной из перестановок из симметрической группы S_k с учетом симплициальных соотношений из одной и той же упорядоченной симплициальной грани. Верно и обратное, т.е. перебор всех перестановок из группы S_k даст все возможные вырождения, входящие в формулу. Таким образом, оба способа перебора возможных вырождений – с помощью формулы (3) и с помощью процедуры из определения высших вырождений в гомологиях – приводят к перечислению одних и тех же выражений. Таким образом, любая равная некоторой упорядоченной грани $s_{i_1, i_2, \dots, i_n}$, где $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$, высшая грань будет иметь вид $s_{\hat{\sigma}(i_1), \hat{\sigma}(i_2), \dots, \hat{\sigma}(i_n)}$, где σ – подстановка из симметрической группы S_k , что и требовалось показать.

Но тогда для двух равных вырождений $s_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n}$ и $s_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}-1, i_k, \dots, i_n}$ набор последовательностей $s_{t_1}, s_{t_2}, \dots, s_{t_k}$, используемых для их построения, окажется одним и тем же. Это следует из того, что последовательность

$$s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}, s_{i_{k+1}}, \dots, s_{i_n}$$

входит в набор последовательностей для последовательности

$$s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{k+1}-1}, s_{i_k}, \dots, s_{i_n},$$

полученных в результате применения последовательности симплициальных соотношений. Таким образом, мы показали, что высшие грани $s_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n}$ и $s_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}-1, i_k, \dots, i_n}$ будут состоять из одних и тех же составных слагаемых вида $\eta(s_{t_1} h s_{t_2} h \dots h s_{t_k}) \xi$, т.е. на гомологиях рассматриваемого цепного комплекса существует структура высших вырождений, что и требовалось показать. Теорема доказана.

Пример 3. Рассмотрим построение на гомологиях цепного комплекса с цепными вырождениями высшего вырождения $s_{2,4,5}$. Применим к каждой паре последовательности $s_2 s_4 s_5$ симплициальные соотношения. Получим набор последовательностей $s_2 s_4 s_5$, $s_5 s_2 s_5$, $s_5 s_6 s_2$, $s_7 s_5 s_2$, $s_7 s_2 s_4$, $s_2 s_6 s_4$. Заметим, что каждая из них может быть получена из другой последовательным применением соотношений (ii). Используя формулу (6), получим следующее выражение:

$$s_{2,4,5} = \eta s_2 h s_4 h s_5 \xi + \eta s_5 h s_2 h s_5 \xi + \eta s_5 h s_6 h s_2 \xi +$$

$$+ \eta s_7 h s_5 h s_2 \xi + \eta s_7 h s_2 h s_4 \xi + \eta s_2 h s_6 h s_4 \xi.$$

Покажем, что для вырождения $s_{2,4,5}$ выполнены соотношения (3) из определения высших вырождений. Для рассматриваемого вырождения они примут вид

$$\sum s_{2,4,5} + s_{5,2,5} + s_{5,6,2} + s_{2,6,4} + s_{7,2,4} + s_{7,5,2} = 0.$$

Справедливость последнего равенства следует из того, в определении каждого из входящих в него высших вырождений будет использован один и тот же набор последовательностей вырождений на исходном цепном комплексе $s_2 s_4 s_5$, $s_5 s_2 s_5$, $s_5 s_6 s_2$, $s_7 s_5 s_2$, $s_7 s_2 s_4$, $s_2 s_6 s_4$.

3. Действие дифференциала на высших вырождениях

Теперь покажем, как на определенных нами высших вырождениях на гомологиях должен действовать дифференциал. Данное утверждение сформулируем в виде следующей теоремы

Теорема 2. Дифференциал от высшего вырождения $s_{i_1, i_2, \dots, i_n}$, где $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$, равен нулю при $k = 1$, а при $k > 1$ определяется формулой

$$d(s_{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} s_{\hat{\sigma}(i_1), \dots, \hat{\sigma}(i_t)} s_{\hat{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \hat{\sigma}(i_n)}. \quad (7)$$

Суммирование в формуле (7) идет в первом случае по всем возможным перестановкам из симметрической группы S_k , а во втором – по множеству I_σ всех разбиений набора $\hat{\sigma}(i_1), \dots, \hat{\sigma}(i_t)$ на два строго упорядоченных блока $\hat{\sigma}(i_1), \dots, \hat{\sigma}(i_k)$ и $\hat{\sigma}(i_{k+1}), \dots, \hat{\sigma}(i_t)$, т.е. блоки, в которых выполняются условия $\hat{\sigma}(i_1) < \hat{\sigma}(i_2) < \dots < \hat{\sigma}(i_k)$ и $\hat{\sigma}(i_{k+1}) < \hat{\sigma}(i_{k+2}) < \dots < \hat{\sigma}(i_t)$. В данном определении символ $\hat{\sigma}(i_k)$ рассматривается в смысле ранее введенных отображений.

Замечание. Множество I_σ может быть и пустым для некоторой подстановки σ . Например, для подстановки $\sigma = (2 \ 3 \ 5 \ 4 \ 1)$ множество I_σ пусто.

Доказательство. Рассмотрим вырождение $s_{i_1, i_2, \dots, i_k}$. Рассмотрим действие дифференциала на данном вырождении. Оно задается, как обычно, правилом Лейбница:

$$d(s_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = d s_{i_1, i_2, \dots, i_k} + s_{i_1, i_2, \dots, i_k} d.$$

Подставим в полученную формулу выражения для определения высших вырождений из формулы (6). Получим следующее выражение:

$$d(s_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = d \sum \eta(s_{i_1} h s_{i_2} h \dots h s_{i_k}) \xi + \sum \eta(s_{i_1} h s_{i_2} h \dots h s_{i_k}) \xi d,$$

где суммирование берется по всем возможным последовательностям $s_{t_1}, s_{t_2}, \dots, s_{t_k}$, полученным в результате действия симплициальных соотношений для вырождений на подстановки, примененные к последовательности $i_1, i_2, \dots, i_k$.

Поскольку отображения η, s_i, ξ цепные, то дифференциалы можно внести в суммы и провести до первой встреченной гомотопии, т.е. получить выражение

$$d(s_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = \sum \eta(s_{t_1} dhs_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} h \dots hds_{t_k}) \xi.$$

Учитывая определение гомотопии, мы сможем в слагаемых, входящих в первую сумму, поменять дифференциал и гомотопию, т.е. получить выражение вида

$$\begin{aligned} d(s_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = & \sum \eta(s_{t_1} hds_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \sum \eta(s_{t_1} s_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \\ & + \sum \eta(s_{t_1} \xi \eta s_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} h \dots hds_{t_k}) \xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим вторую сумму:

$$\sum \eta(s_{t_1} s_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi.$$

Она будет равна нулю, так все последовательности $s_{t_1}, s_{t_2}, \dots, s_{t_k}$ получены в результате действия симплициальных соотношений. Поэтому все наборы $t_1, t_2, \dots, t_k$ можно будет разбить на пары, отличающиеся только первыми двумя числами, причем отличие будет таковым:

$$\sum \eta(s_{t_1} s_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi = \sum \eta(s_{t_1} s_{t_2} + s_{t_2+1} s_{t_1}) h \dots hs_{t_k}) \xi.$$

Учитывая симплициальные соотношения, выражение в каждой из скобок равно нулю. Поэтому формула (8) примет вид

$$\begin{aligned} d(s_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = & \sum \eta(s_{t_1} hds_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \\ & + \sum \eta(s_{t_1} \xi \eta s_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} h \dots hds_{t_k}) \xi. \end{aligned}$$

Продолжим процесс далее. Пользуясь тем, что отображения η, s_i, ξ цепные, продолжим движение дифференциала по первой сумме. Получим

$$\begin{aligned} d(s_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = & \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} dh \dots hs_{t_k}) \xi + \\ & + \sum \eta(s_{t_1} \xi \eta s_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} h \dots hds_{t_k}) \xi. \end{aligned}$$

Заменяя dh в первом слагаемом по определению гомотопии, получим выражение вида

$$\begin{aligned} d(s_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = & \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} hd \dots hs_{t_k}) \xi + \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} \xi \eta \dots hs_{t_k}) \xi + \\ & + \sum \eta(s_{t_1} \xi \eta s_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} h \dots hs_{t_k}) \xi + \sum \eta(s_{t_1} hs_{t_2} h \dots hds_{t_k}) \xi. \end{aligned}$$

По соображениям, аналогичным ранее приведенным, четвертое слагаемое будет равно нулю. Продолжая данный процесс, получим

$$d(s_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = \sum \eta(s_{t_1} h s_{t_2} h \dots \xi \eta \dots h s_{t_k}) \xi,$$

где суммирование идет, кроме всех наборов $t_1, t_2, \dots, t_n$, еще и по всем местам, на которых может стоять отображение $\xi\eta$. Поскольку будут перебраны все возможные варианты перемножений каждого из наборов на другой, то для доказательства теоремы становится достаточно заметить, что из всевозможных последовательностей $s_{t_1}, s_{t_2}, \dots, s_{t_k}$, входящих в определение высшего вырождения, только одно является упорядоченным, т.е. удовлетворяет условию $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Таким образом, каждая подпоследовательность, входящая в определение некоторого высшего вырождения, определяется одним упорядоченным представителем. Эти рассуждения позволяют сделать вывод о справедливости утверждения теоремы.

Заключение

В результате наших исследований построен A_∞ -аналог вырождений для симплициального случая, а также описан пример существования данной конструкции на гомологиях цепного комплекса. Доказательство теоремы 1 является конструктивным, что позволяет строить высшие симплициальные операции на гомологиях цепного комплекса специального вида. Кроме того, в теореме 2 исследуется вопрос о связи полученных операций с дифференциалом в цепном комплексе. Полученные результаты могут быть использованы для построения общей структуры гомотопически устойчивого объекта, что является целью дальнейших исследований автора.

Список литературы

1. **Кадеишвили, Т. В.** К теории гомологий расслоенных пространств / Т. В. Кадеишвили // Успехи математических наук. – 1980. – Т. 35, Вып. 3 (213). – С. 183–188.
2. **Лапин, С. В.** Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули / С. В. Лапин // Математический сборник. – 2001. – Т. 192, № 11. – С. 55–76.
3. **Смирнов, В. А.** A_∞ -симплициальные объекты и A_∞ -топологические группы / В. А. Смирнов // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, Вып. 6. – С. 913–919.
4. **Ладоскин, М. В.** Гомотопически устойчивый аналог симплициальных граней / М. В. Ладоскин // Учебный эксперимент в образовании. – 2010. – № 3. – С. 62–69.
5. **May, J. P.** Simplicial objects in algebraic topology / J. P. May // Van Nostred, Math.Studies. – 1967. – V. 11. – 162 p.
6. **Gugenheim, V. K. A. M.** On a chain complex of a fibration / V. K. A. M. Gugenheim // Illinois J. Math. – 1972. – V. 3. – P. 398–418.

Ладоскин Михаил Владимирович

кандидат физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой
математики, Мордовский
государственный педагогический
институт им. М. Е. Евсевьева
(г. Саранск)

E-mail: michldosh@gmail.com

Ladoshkin Mikhail Vladimirovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, head
of sub-department of mathematics,
Mordovia State Pedagogical Institute
named after M. E. Evseyev (Saransk)

УДК 512.662.1

Ладошкин, М. В.

Построение аналога симплициальных вырождений в A_∞ -случае /
М. В. Ладошкин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион.
Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 80–89.